

## SUR LES QUASI-NOYAUX D'UN GRAPHE

Pierre DUCHET, Yahya Ould HAMIDOUNE, Henry MEYNIEL

*Département de Mathématiques, C.N.R.S., Université P. et M. Curie, U.E.R. 48, 75005 Paris, France*

Received 8 January 1986

Revised 13 August 1986

We define three classes of quasi-kernels for a directed graph. As a consequence, we show the existence of quasi-kernels in every progressively finite graph and in every locally finite graph, generalizing the result of Chvátal and Lovász which deals with the finite case. Our method shows that the problem of finding a quasi-kernel in a finite digraph and the problem of finding the unique kernel of an acircuited finite digraph have the same algorithmic complexity.

### 1. Introduction

Nous ne considérons que des graphes orientés sans boucles ni arcs multiples. Un graphe dont aucun sommet n'est l'origine d'un chemin infini est dit *progressivement fini*. Lorsque tout sommet d'un graphe a un nombre fini de successeurs (resp. de prédécesseurs), le graphe est dit *localement fini à droite* (resp. *à gauche*).

Le sous-graphe orienté d'un graphe  $G = (X, U)$  engendré par une partie  $A \subseteq X$  est noté  $G[A]$ . On pose  $G^-(A) = \{x \in X \mid x \text{ a un successeur dans } A\}$ . Un *noyau* de  $G$  est une partie  $N \subseteq X$  qui est à la fois *stable* (i.e.,  $G^-(N) \cap N = \emptyset$ ) et *absorbante* (i.e.,  $G^-(N) \cup N = X$ ). La notion de noyau est importante en Théorie des Jeux: Von Neumann et Morgenstern [4] ont montré

**Théorème 1.1** ([4]). *Tout graphe progressivement fini et sans circuit possède un noyau et un seul.*

Bry [1], utilisant un argument de compacité, a montré

**Théorème 1.2** ([1]). *Tout graphe localement fini à droite et sans circuit a un noyau.*

L'existence d'un noyau n'est pas garantie pour les graphes sans circuit localement fini à gauche (cf. [3]), ni pour les graphes avec circuits. Une partie  $Q \subseteq X$  est appelée un *quasi-noyau* d'un graphe  $G = (X, U)$  si  $Q$  est stable et si on a  $Q \cup G^-(Q) \cup G^-(G^-(Q)) = X$ . Chvátal et Lovász [2] ont montré

**Théorème 1.3** ([2]). *Tout graphe fini possède un quasi-noyau.*

Nous définissons trois classes de quasi-noyaux dans un graphe fini ou infini, notées  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$ . Nous montrerons que ces classes ne sont pas vides dans le cas d'un graphe progressivement fini ou d'un graphe localement fini à droite. Ceci généralise la résultat de Chvátal et Lovász ci-dessus au cas infini. Nos méthodes fournissent des algorithmes rapides pour engendrer un quasi-noyau dans un graphe fini.

## 2. Quasi-noyaux d'un graphe

L'ensemble des noyaux (resp. des quasi-noyaux) d'un graphe  $G = (X, U)$  sera désigné par  $\mathcal{N}(G)$  (resp.  $\mathcal{Q}(G)$ ). On désignera par  $\mathcal{P}(G)$  l'ensemble des partitions  $\{U_1, U_2\}$  de  $U$  telles que les graphes  $(V, U_1)$  et  $(V, U_2)$  soient tous les deux sans circuits. Notons que  $\mathcal{P}(G) \neq \emptyset$ . En effet, soit  $\leq$  une relation de bon ordre sur  $X$  (nous admettons l'axiome du choix). Soient  $U_1 = \{(x, y) \in U \mid x < y\}$  et  $U_2 = \{(x, y) \in U \mid x > y\}$ . On voit facilement que  $\{E_1, E_2\} \in \mathcal{P}(G)$ .

Pour toute partition  $\pi = \{U_1, U_2\} \in \mathcal{P}(G)$  on pose  $G_1 = (X, U_1)$  et  $G_2 = (X, U_2)$ . L'ensemble  $\mathcal{A}(G, \pi)$  est défini par:

$$\mathcal{A}(G, \pi) = \bigcup_{A \in \mathcal{N}(G_1)} \mathcal{N}(G_2[A]). \quad (2.1)$$

**Lemme 2.2.** *Pour tout  $\pi \in \mathcal{P}(G)$ , on a:  $\mathcal{A}(G, \pi) \subseteq \mathcal{Q}(G)$ .*

**Démonstration.** Avec les notations précédentes, soit  $Q \in \mathcal{A}(G, \pi)$ , et soit  $A \in \mathcal{N}(G_1)$  tel que  $Q \in \mathcal{N}(G_2[A])$ . L'ensemble  $Q$  est stable à la fois dans  $G_1$  et dans  $G_2$ , donc est stable dans  $G$ . Soit  $x \in X \setminus Q$ . Si  $x \in A$ , comme  $Q$  est un noyau de  $G_2[A]$ , le sommet  $x$  a un successeur dans  $Q$ . Si  $x \in X \setminus A$ , le sommet  $x$  a un successeur  $y$  dans  $A$  car  $A$  est un noyau de  $G_1$ . Le sommet  $y$  a, par l'argument précédent un successeur dans  $Q$ . Ceci montre que  $Q$  est un quasi-noyau de  $G$ .  $\square$

**Théorème 2.3.** *Soit  $G$  un graphe progressivement fini. Alors  $G$  a un quasi-noyau.*

**Démonstration.** D'après le Lemme 2.2, il suffit de montrer que  $\mathcal{A}(G, \pi)$  est non vide, pour toute partition  $\pi \in \mathcal{P}(G)$ . Comme tout graphe partiel d'un graphe progressivement fini est encore progressivement fini, le Théorème 1.1, appliqué deux fois, implique l'existence d'un noyau  $A$  de  $G_1$ , puis d'un noyau  $Q$  de  $G_2[A]$ .  $\square$

Ce théorème généralise le Théorème 1.3 de Chvátal et Lovász cité dans l'introduction. Un argument similaire (appliquant deux fois le Théorème 1.2 de Bry) mène à une seconde généralisation:

**Théorème 2.4.** Soit  $G$  un graphe localement fini à droite. Alors  $G$  a un quasi-noyau.

Posons  $\mathcal{A}(G) = \bigcup_{\pi \in \mathcal{P}(G)} \mathcal{A}(G, \pi)$ . Le Lemme 2.2 montre que  $\mathcal{A}(G) \subseteq \mathcal{Q}(G)$ . Cette inclusion peut être stricte, comme le montre en Fig. 1, où l'on voit facilement que  $\{1, 2, 3\} \in \mathcal{Q}(G) \setminus \mathcal{A}(G)$ .

**Remarque 2.5.** Certains graphes infinis ne possèdent aucun quasi-noyau. C'est le cas par exemple du graphe  $(\mathbb{N}, \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x < y\})$ . D'autres exemples plus sophistiqués (où chaque sommet a au plus deux prédécesseurs) peuvent être obtenus à partir des graphes sans circuits et sans noyaux construits par E. Milner et R. Woodrow [3].

Nous allons maintenant définir deux sous-classes de  $\mathcal{A}$ . Soient  $G = (X, U)$  un graphe et  $A \subseteq X$ . On dit que  $A$  est *acircuitique* si  $G[A]$  est un graphe sans circuits.

$$\mathcal{B}(G) = \{Q \mid (\exists A) A \text{ est un absorbant acircuitique et } Q \text{ est un noyau de } G[A]\}.$$

$$\mathcal{C}(G) = \{Q \mid (\exists A) A \text{ est un acircuitique maximal et } Q \text{ est un noyau de } G[A]\}.$$

Il est clair que tout acircuitique maximal est absorbant. En particulier  $\mathcal{C}(G) \subseteq \mathcal{B}(G)$ . L'existence d'un acircuitique maximal résulte du lemme de Zorn. En utilisant le Théorème 1.1 de Von Neumann et Morgenstern ou le Théorème 1.2 de Bry, on voit facilement que  $\mathcal{C}(G) \neq \emptyset$  pour tout graphe progressivement fini et pour tout graphe localement fini à droite.

**Théorème 2.6.** Soit  $G$  un graphe. On a les inclusions  $\mathcal{C}(G) \subseteq \mathcal{B}(G) \subseteq \mathcal{A}(G) \subseteq \mathcal{Q}(G)$ .

**Démonstration.** Il suffit de montrer l'inclusion  $\mathcal{B}(G) \subseteq \mathcal{A}(G)$ . Soit  $G = (X, U)$  un graphe, soit  $Q \in \mathcal{B}(G)$  et soit  $A$  un absorbant acircuitique tel que  $Q$  soit un noyau de  $G[A]$ . Soit  $\{U', U''\} \in \mathcal{P}(G[X \setminus A])$ . On pose:

$$U_1 = U' \cup \{(x, y) \in U \mid x \in X \setminus A \text{ et } y \in A\},$$

$$U_2 = U'' \cup \{(x, y) \in U \mid x \in A\}.$$

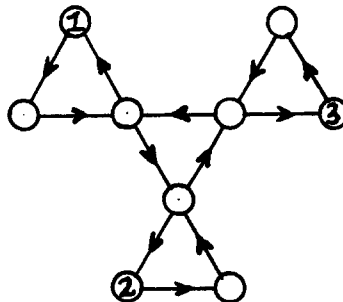


Fig. 1.

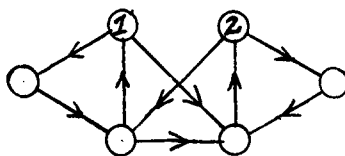


Fig. 2.

On voit facilement que  $\{U_1, U_2\} \in \mathcal{P}(G)$ . Montrons que  $A$  est un noyau de  $G_1 = (X, U_1)$ : clairement  $A$  est stable dans  $G_1$ ; puisque  $A$  est absorbant dans  $G$  et que  $G_1$  contient tous les arcs de  $X \setminus A$  à  $A$ , l'ensemble  $A$  est aussi absorbant dans  $G_1$ . Ceci montre  $Q \in \mathcal{A}(G, \pi) \subseteq \mathcal{A}(G)$  où  $\pi = \{U_1, U_2\}$ .  $\square$

### 3. Remarques finales

**Remarque 3.1.** Les inclusions du théorème précédent peuvent être strictes: pour le graphe de la Fig. 2 on a  $\{1, 2\} \in \mathcal{A}(G) \setminus \mathcal{B}(G)$  et pour le graphe de la Fig. 3 on a  $\{1\} \in \mathcal{B}(G) \setminus \mathcal{C}(G)$ .

**Remarque 3.2.** Dans le cas d'un graphe fini, on peut formuler des algorithmes rapides pour trouver des quasi-noyaux dans chacune des classes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$ . En particulier le problème de trouver un quasi-noyau de la classe  $\mathcal{A}$  est ramené en temps linéaire à celui de trouver un noyau dans un graphe sans circuit, ce qui est algorithmiquement simple.

**Remarque 3.3.** On peut voir que la classe des quasi-noyaux des graphes finis construite par Chvátal et Lovász [2] coïncide avec la classe  $\mathcal{B}$  que nous avons définie plus haut.

**Remarque 3.4.** Un graphe est dit *noyau-parfait* si tout sous-graphe induit a un noyau. Les graphes finis acircuitiques sont noyau-parfaits. La condition "acircuitique" dans les définitions des classes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  peut être relaxée en la condition "noyau-parfait". Les classes  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{B}'$ ,  $\mathcal{C}'$ , obtenues par cette relaxation contiennent respectivement les classes  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et on a  $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{C}' \subseteq \mathcal{Q}$ . Toutes les inclusions mentionnées peuvent être strictes.

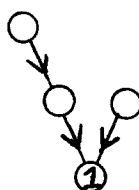


Fig. 3.

**References**

- [1] F. Bry, Sur les noyaux dans les graphes infinis, Note de Recherche, Univ. Paris 6 (1979) non publié.
- [2] V. Chvátal and L. Lovász, Every directed graph has a semi-kernel, in: Hypergraph Seminar, Lect. Notes in Math. 411 (Springer, Berlin, 1974) 175.
- [3] E.C. Milner and R.E. Woodrow, On directed graphs with an independent covering set (1985) submitted.
- [4] J. von Neuman and O. Morgenstern, Theory of Games and Economical Behavior (Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1944).